Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
Optimale Regelung und Schätzung
Kapitel 3: Stochastische Grundlagen

Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Inhalt

- Zufallsvariablen und Zufallsprozesse
- Verteilungs- und Dichtefunktionen
- Unabhängige Zufallsvariablen und Zufallsprozesse
- Markoff-Prozesse
- Erwartungswerte
- Korrelations- und Kovarianzfunktionen
- Unkorrelierte Zufallsprozesse
- Stationäre Zufallsprozesse
- Ergodische Zufallsprozesse
- Leistungsspektren
- Normale Zufallsprozesse
- Weißes Rauschen

Zentrale Quelle dieser Präsentation:	K. Brammer, G. Siffling	Stochastische Grundlagen des Kalman-Bucy-Filters, R. Oldenbourg Verlag München Wien, 2. Auflage, 1986.

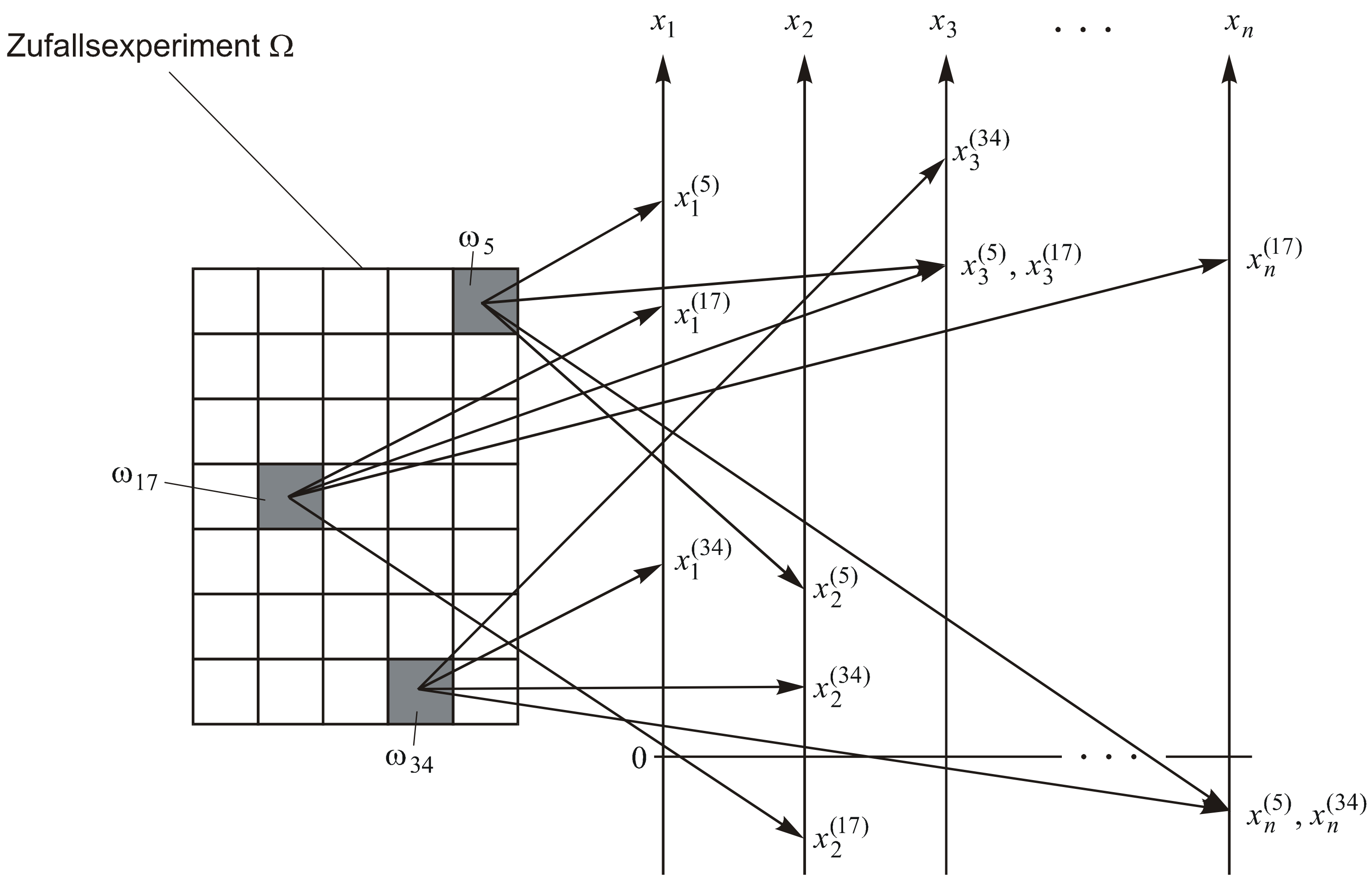
Zufallsvariablen und Zufallsprozesse

- Ausgangspunkt: *Zufallsexperiment*
  - Elementarereignisse $\omega_i \ (i = 1, \dots, n)$
  - Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

- Eine *Zufallsvariable* (ZV) ist eine Zuordnung von Zahlenwerten zu den Elementarereignissen ω_i

Abb. Aus http://www.stickyjam.de

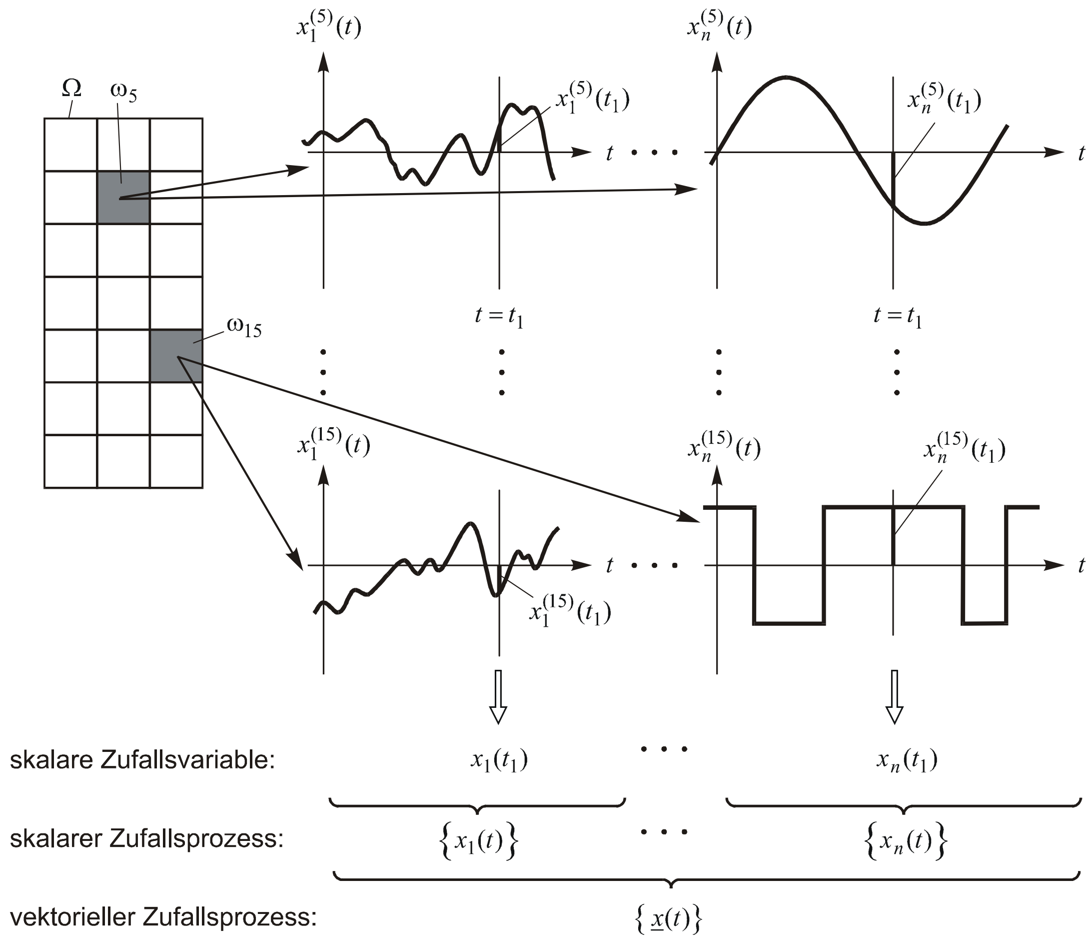
Zufallsvariablen und Zufallsprozesse



Zufallsvariablen und Zufallsprozesse

- Ein *Zufallsprozess* (ZP) ist ein Ensemble von *Musterfunktionen*:
  - $x^{(i)}(t)$ bzw. $\underline{x}^{(i)}(t)$

- Also:
  - $\{x(t)|_{t=t_i} = x(t_i)\}$
    → ZV
  - $\{x(t)|_{\omega=\omega_i} = x^{(i)}(t)\}$
    → Musterfunktion

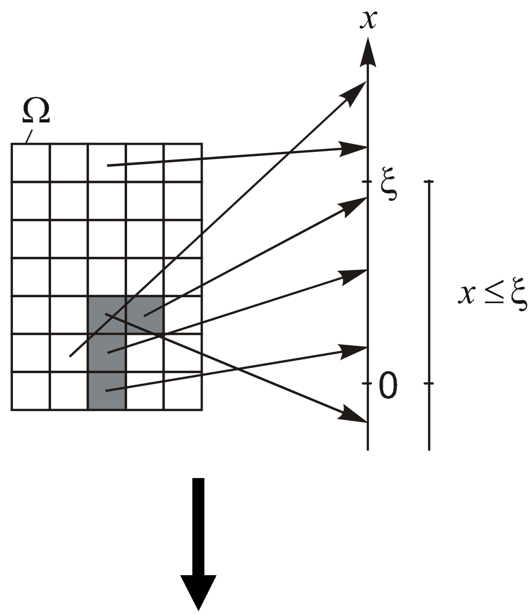


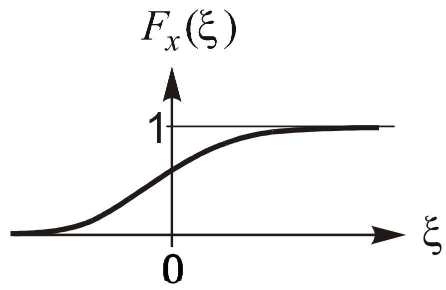
Verteilungs- und Dichtefunktionen

- Verteilungs- und Dichtefunktionen dienen der mathematischen Beschreibung von ZVn und ZPen

- *Verteilungsfunktion*: Wahrscheinlichkeit, mit der der Wert der ZV x unterhalb einer bestimmten deterministischen Grenze ξ liegt:
  - $F_x(\xi) := P(x \leq \xi)$
  - $F_x(-\infty) = 0$

    $F_x(+\infty) = 1$



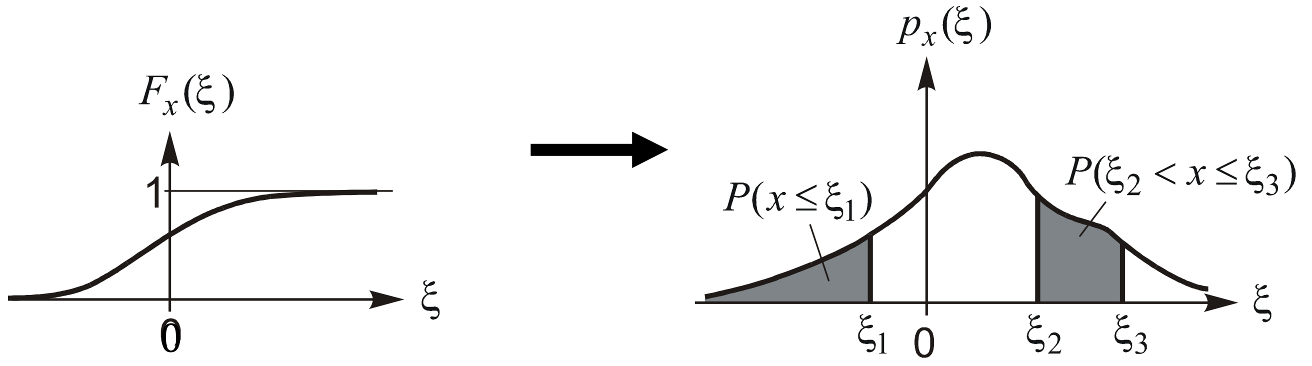


Verteilungs- und Dichtefunktionen

- *Dichtefunktion*

  Differentiation der Verteilungsfunktion nach ξ

$$\boxed{p_x(\xi) := \frac{\partial}{\partial \xi} F_x(\xi)} \Rightarrow F_x(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} p_x(x)\,dx$$



Verteilungs- und Dichtefunktionen

- Bisher: Betrachtung von skalaren ZVn
- Jetzt: Vektorielle ZVn und Stochastische Prozesse

Bsp. für eine vektorielle ZV: $\underline{x} = \left[x(t_1), \ldots, x(t_n) \right]^T$

- *n-dimensionale (Verbund-) Verteilungsfunktion*

$$F_{\underline{x}}(\xi_1, t_1, \ldots, \xi_n, t_n) := P\Big(\big(x(t_1) \leq \xi_1\big) \cap \ldots \cap \big(x(t_n) \leq \xi_n\big)\Big)$$

- *n-dimensionale (Verbund-) Dichtefunktion*

$$p_{\underline{x}}(\xi_1, t_1, \ldots, \xi_n, t_n) := \frac{\partial^n}{\partial \xi_1 \ldots \partial \xi_n} F_{\underline{x}}(\xi_1, t_1, \ldots, \xi_n, t_n)$$

Verteilungs- und Dichtefunktionen

- Zufallsprozesse:
  - Skalarer ZP $\{x(t)\}$:

    $P(x(t_1) \leq \xi_1) =: F_x(\xi_1, t_1)$: *eindimensionale Verteilungsfunktion*

  - Experimentelle Bestimmung von $F_x(\xi_1, t_1)$ über *relative Häufigkeit*

    N bekannte Musterfunktionen $x^{(i)}(t)$ $(i = 1, \ldots, N)$ seien bekannt

    $x^{(i)}(t)|_{t_1} = x^{(i)}(t_1) \leq \xi_1$ sei N_1-mal erfüllt

    → $F_x(\xi_1, t_1) \approx {}^{N_1}/_{N}$

  - *Eindimensionale Dichtefunktion:* $p_x(\xi_1, t_1) := \dfrac{\delta}{\delta \xi_1} F_x(\xi_1, t_1)$

  - analog: vektorielle ZPe

Bedingte Verteilungs- und Dichtefunktionen

- Gegeben: Zwei Ereignisse A und B

- *Bedingte Wahrscheinlichkeit* $P(A|B)$: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses A bei eingetretenem Ereignis B

- Es gilt:

$$P\left(A\middle|B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \left(P(B) > 0\right)$$

- Notwendig zur späteren Schätzung auf Basis gegebener Messwerte

Bedingte Verteilungs- und Dichtefunktionen

- Es sei $A = P(x \leq \xi)$ und $B = P(y = \varsigma)$
- *Bedingte Verteilungsfunktion*

$$F_{x|y}(\xi|\varsigma) = \frac{\int_{-\infty}^{\xi} p_{xy}(x,\varsigma)\,dx}{p_y(\varsigma)}$$

- *Bedingte Dichtefunktion*

$$p_{x|y}(\xi|\varsigma) = \frac{p_{xy}(\xi,\varsigma)}{p_y(\varsigma)}$$

- Bemerkung:
  - Obwohl B streng genommen infinitesimal klein ist, lassen sich beide Ausdrücke durch eine formale Grenzwertbildung erhalten

Bedingte Verteilungs- und Dichtefunktionen

- Bisher: Betrachtung von bedingten skalaren ZVn
- Jetzt: Bedingte Stochastische Prozesse und vektorielle ZVn

- Für $\underline{x} = \left[\underline{x}(t_1), \dots, \underline{x}(t_n)\right]^{\mathrm{T}}$ und $\underline{y} = \left[\underline{y}(t_1^*), \dots, \underline{y}(t_m^*)\right]^{\mathrm{T}}$ gilt:

$$p_{\underline{x}|\underline{y}}\left(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n \middle| \varsigma_1, t_1^*, \dots, \varsigma_m, t_m^*\right) = \frac{p_{\underline{x}\,\underline{y}}\left(\xi_1, t_1, \dots, \varsigma_m, t_m^*\right)}{p_{\underline{y}}\left(\varsigma_1, t_1^*, \dots, \varsigma_m, t_m^*\right)}$$

Bedingte Verteilungs- und Dichtefunktionen

- Kettenregel für n-dimensionale Verbund-Dichtefunktion
  - Gegeben: n ZVn $x_1(t_1), \ldots, x_n(t_n)$ mit $t_1 < \cdots < t_n$
  - Auflösen der Kettenregel nach der Verbunddichtefunktion und sukzessives Einsetzen ergibt:

$$
\begin{aligned}
& p_{\underline{x}}\left(\xi_n, t_n, \ldots, \xi_1, t_1\right) \\
& = p_{x_n | x_{n-1} \ldots x_1}\left(\xi_n, t_n \middle| \xi_{n-1}, t_{n-1}, \ldots, \xi_1, t_1\right) \cdot \\
& \cdot \; p_{x_{n-1} | x_{n-2} \ldots x_1}\left(\xi_{n-1}, t_{n-1} \middle| \xi_{n-2}, t_{n-2}, \ldots, \xi_1, t_1\right) \cdot \\
& \vdots \\
& \cdot \; p_{x_2 | x_1}\left(\xi_2, t_2 \middle| \xi_1, t_1\right) \\
& \cdot \; p_{x_1}\left(\xi_1, t_1\right)
\end{aligned}
$$

Unabhängige Zufallsvariablen

- Ausgangspunkt: n-dimensionale ZV $\underline{x} = [x_1, \dots, x_n]^\mathrm{T}$
- Einzelne ZVn *unabhängig*, falls

$$F_{\underline{x}}(\xi_1, \dots, \xi_n) = F_{x_1}(\xi_1) \cdot \ldots \cdot F_{x_n}(\xi_n)$$

- bzw.

$$p_{\underline{x}}(\xi_1, \dots, \xi_n) = p_{x_1}(\xi_1) \cdot \ldots \cdot p_{x_n}(\xi_n)$$

- Mit der Kettenregel gilt dann

$$p_{x_1 | x_2, \dots, x_n}(\xi_1 | \xi_2, \dots, \xi_n) = p_{x_1}(\xi_1)$$

Unabhängige Zufallsvariablen

- Erweiterung auf vektorielle ZVn

  $\underline{x} = [x(t_1), \dots, x(t_n)]^\mathrm{T}$ und $\underline{y} = [y(t_1^*), \dots, y(t_m^*)]^\mathrm{T}$

  - *Unabhängigkeit*: Jede Komponente der einen ZVn ist unabhängig von jeder Komponente der anderen ZVn
  - Für beliebige n, m ist dann

$$F_{\underline{x}\,\underline{y}}(\xi_1, \dots, \xi_n, \varsigma_1, \dots, \varsigma_m) = F_{\underline{x}}(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot F_{\underline{y}}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_m)$$

bzw.

$$p_{\underline{x}\,\underline{y}}(\xi_1, \dots, \xi_n, \varsigma_1, \dots, \varsigma_m) = p_{\underline{x}}(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot p_{\underline{y}}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_m)$$

  - Wieder gilt:

$$p_{\underline{x}|\underline{y}}(\xi_1, \dots, \xi_n | \varsigma_1, \dots, \varsigma_m) = p_{\underline{x}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Unabhängige Zufallsprozesse

Unabhängigkeit der ZVn überträgt sich auf die ZPe:

- Skalare ZPe $\{x(t)\}$ und $\{y(t)\}$ sind *unabhängig*, wenn die daraus gewonnenen vektoriellen ZVn $\underline{x} = [x(t_1), \dots, x(t_n)]^{\mathrm{T}}$ und $[y(t_1^*), \dots, y(t_m^*)]^{\mathrm{T}}$ für beliebige n und m und für beliebige Zeitpunkte $t_1, \dots, t_n, t_1^*, \dots, t_m^*$ unabhängig voneinander sind

- Vektorielle ZPe $\{\underline{x}(t)\} = \{[x_1(t), \dots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}\}$ und $\{\underline{y}(t)\} = \{[y_1(t), \dots, y_m(t)]^{\mathrm{T}}\}$ sind unabhängig, wenn jede Komponente des einen ZPes unabhängig von jeder Komponente des anderen ZPes ist

Markoff-Prozesse

- ZP $\{x(t)\}$ heißt *Markoff-Prozess*, wenn sein aktueller Zustand nur vom Zustand zum unmittelbar zurückliegenden Zeitpunkt abhängt
  - Keine direkte Abhängigkeit von der weiteren Vergangenheit
  - Für die ZVn $x(t_1),\ldots,\ x(t_n)$ des ZPes zu den beliebigen Zeitpunkten $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ und für beliebige $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ gilt dann

$$P\Big(x(t_n) \le \xi_n \Big| \big(x(t_{n-1}) = \xi_{n-1}\big) \cap \cdots \cap \big(x(t_1) = \xi_1\big)\Big) = P\Big(x(t_n) \le \xi_n \Big| x(t_{n-1}) = \xi_{n-1}\Big)$$

  - Die bedingten Verteilungs- und Dichtefunktionen lauten somit
    - $F_{x_n|x_{n-1}\ldots x_1}\left(\xi_n, t_n \middle| \xi_{n-1}, t_{n-1}, \ldots, \xi_1, t_1\right) = F_{x_n|x_{n-1}}\left(\xi_n, t_n \middle| \xi_{n-1}, t_{n-1}\right)$
    - $p_{x_n|x_{n-1}\ldots x_1}\left(\xi_n, t_n \middle| \xi_{n-1}, t_{n-1}, \ldots, \xi_1, t_1\right) = p_{x_n|x_{n-1}}\left(\xi_n, t_n \middle| \xi_{n-1}, t_{n-1}\right)$

Markoff-Prozesse

- Vereinfachte Kettenregel der Dichtefunktionen bei Markoff-Prozessen

$$
\begin{aligned}
p_{\underline{x}}\left(\xi_n, t_n, \ldots, \xi_1, t_1\right) = \; & p_{x_n|x_{n-1}}\left(\xi_n, t_n \middle| \xi_{n-1}, t_{n-1}\right) \cdot \\
\cdot \; & p_{x_{n-1}|x_{n-2}}\left(\xi_{n-1}, t_{n-1} \middle| \xi_{n-2}, t_{n-2}\right) \cdot \\
\vdots \; & \\
\cdot \; & p_{x_2|x_1}\left(\xi_2, t_2 \middle| \xi_1, t_1\right) \\
\cdot \; & p_{x_1}\left(\xi_1, t_1\right)
\end{aligned}
$$

Erwartungswerte für Zufallsvariablen

Karlsruher Institut für Technologie

- Gegeben: ZV $x(t_1)$
- *Erwartungswert* entspricht dem Ensemblemittelwert

$$E\left\{x(t_1)\right\} := \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 \, p_x(\xi_1, t_1) \, d\xi_1$$

- Wird auch *Mittelwert* oder *Moment* genannt (Bezeichnung stammt aus der Mechanik)
- *Momente k-ter Ordnung* $E\{(x-c)^k\}$ bezüglich c
  - $c = 0$: *Gewöhnliches Moment*
  - $c = E\{x\}$: *Zentralmoment*

Erwartungswerte für Zufallsvariablen

- Beispiele wichtiger Erwartungswerte:
  - *Erwartungswert*
    - Gewöhnliches Moment 1. Ordnung

$$E\left\{x(t_1)\right\} := \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 \, p_x\left(\xi_1, t_1\right) d\xi_1$$

  - *Quadratischer Mittelwert von* $x(t_1)$
    - Gewöhnliches Moment 2. Ordnung

$$E\left\{x^2(t_1)\right\} := \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1^2 \, p_x\left(\xi_1, t_1\right) d\xi_1$$

  - *Varianz* von $x(t_1)$
    - Zentralmoment 2. Ordnung

$$E\left\{\left[x(t_1) - E\left\{x(t_1)\right\}\right]^2\right\} := \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\xi_1 - E\left\{x(t_1)\right\}\right]^2 p_x\left(\xi_1, t_1\right) d\xi_1$$

Erwartungswerte für Zufallsvariablen

- Rechenregeln
  - $E\left\{g(x)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, p_x(\xi)\, d\xi$
  - $E\{a\} = a$ (a konstant)
  - $E\left\{a\, g_1(x) \pm b\, g_2(x)\right\} = a\, E\left\{g_1(x)\right\} \pm b\, E\left\{g_2(x)\right\}$ (a, b konstant)

Erwartungswerte für Zufallsprozesse

- Jetzt: Zwei ZVn $x(t_1)$ und $x(t_2)$ eines ZPes $\{x(t)\}$ betrachtet
- *Autokorrelationsfunktion (AKF)*

$$r_{xx}(t_1,t_2) := E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1\xi_2 p_{xx}(\xi_1,t_1,\xi_2,t_2)\,d\xi_1 d\xi_2$$

- *Autokovarianzfunktion*

$$\begin{aligned} c_{xx}(t_1,t_2) &:= E\{[x(t_1)-E\{x(t_1)\}][x(t_2)-E\{x(t_2)\}]\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [\xi_1 - E\{x(t_1)\}][\xi_2 - E\{x(t_2)\}]\, p_{xx}(\xi_1,t_1,\xi_2,t_2)\,d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

- Es gilt der Zusammenhang:

$$c_{xx}(t_1,t_2) = r_{xx}(t_1,t_2) - E\{x(t_1)\}\cdot E\{x(t_2)\}$$

Erwartungswerte für Zufallsprozesse

- Bisher: ZVn $x(t_1)$ und $x(t_2)$ aus demselben ZP $\{x(t)\}$
- Jetzt: ZVn $x(t_1)$ und $y(t_2)$ aus zwei ZPen $\{x(t)\}$, $\{y(t)\}$

- *Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)*

$$r_{xy}(t_1, t_2) := E\{x(t_1)\, y(t_2)\}$$

- *Kreuzkovarianzfunktion*

$$c_{xy}(t_1, t_2) := E\{[x(t_1) - E\{x(t_1)\}][y(t_2) - E\{y(t_2)\}]\}$$

- Auch hier gilt:

$$c_{xy}(t_1, t_2) = r_{xy}(t_1, t_2) - E\{x(t_1)\} \cdot E\{y(t_2)\}$$

Erwartungswerte für Zufallsprozesse

- Bisher: maximal zwei ZVn betrachtet
- Jetzt: $2n$ ZVn betrachtet

- Für die Erwartungswerte gilt dann:
  - $E\{\underline{x}\} = \left[E\{x_1\}, \ldots, E\{x_n\}\right]^T$
  - $E\{\underline{X}\} = E\left\{\left(x_{ij}\right)\right\} = \left(E\left\{x_{ij}\right\}\right)$
  - $E\left\{\underline{X}^T\right\} = \left[E\{\underline{X}\}\right]^T$

Erwartungswerte für Zufallsprozesse

- *Korrelationsmatrizen*
  - ZVn aus demselben ZP

$$\underline{R}_{\underline{x}\,\underline{x}}(t_1, t_2) := E\left\{ \underline{x}(t_1) \cdot \underline{x}^T(t_2) \right\} = \begin{bmatrix} r_{x_1 x_1}(t_1, t_2) & \dots & r_{x_1 x_n}(t_1, t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{x_n x_1}(t_1, t_2) & \dots & r_{x_n x_n}(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

  - ZVn aus verschiedenen ZPen

$$\underline{R}_{\underline{x}\,\underline{y}}(t_1, t_2) := E\left\{ \underline{x}(t_1) \cdot \underline{y}^T(t_2) \right\} = \begin{bmatrix} r_{x_1 y_1}(t_1, t_2) & \dots & r_{x_1 y_n}(t_1, t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{x_n y_1}(t_1, t_2) & \dots & r_{x_n y_n}(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

Erwartungswerte für Zufallsprozesse

- *Kovarianzmatrizen*
  - ZVn aus demselben ZP

$$\underline{P}_{\underline{x}\underline{x}}(t_1, t_2) := E\left\{\left[\underline{x}(t_1) - E\{\underline{x}(t_1)\}\right]\left[\underline{x}(t_2) - E\{\underline{x}(t_2)\}\right]^T\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{x_1 x_1}(t_1, t_2) & \dots & c_{x_1 x_n}(t_1, t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{x_n x_1}(t_1, t_2) & \dots & c_{x_n x_n}(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

  - ZVn aus verschiedenen ZPen

$$\underline{P}_{\underline{x}\underline{y}}(t_1, t_2) := E\left\{\left[\underline{x}(t_1) - E\{\underline{x}(t_1)\}\right]\left[\underline{y}(t_2) - E\{\underline{y}(t_2)\}\right]^T\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{x_1 y_1}(t_1, t_2) & \dots & c_{x_1 y_n}(t_1, t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{x_n y_1}(t_1, t_2) & \dots & c_{x_n y_n}(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

Erwartungswerte für Zufallsprozesse

- Die Beziehungen zwischen Korrelation und Kovarianz übertragen sich analog aus dem Skalaren auf die Matrizen:

  - ZVn aus demselben ZP

$$\underline{P}_{\underline{x}\,\underline{x}}(t_1\,,t_2)=\underline{R}_{\underline{x}\,\underline{x}}(t_1\,,t_2)-E\left\{\underline{x}(t_1)\right\}\cdot E\left\{\underline{x}^T(t_2)\right\}$$

  - ZVn aus verschiedenen ZPen

$$\underline{P}_{\underline{x}\,\underline{y}}(t_1\,,t_2)=\underline{R}_{\underline{x}\,\underline{y}}(t_1\,,t_2)-E\left\{\underline{x}(t_1)\right\}\cdot E\left\{\underline{y}^T(t_2)\right\}$$

Bedingte Erwartungswerte

- Gegeben: Zwei ZVn x und y
- Annahme: Es gilt $y = \varsigma$ → bedingte Dichtefunktion $p_{x|y}(\xi|\varsigma)$ bildbar

- *Bedingter Erwartungswert*

$$E\{x|y\} := \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\, p_{x|y}\left(\xi|\varsigma\right) d\xi$$

- Es gelten folgende Rechenregeln
  - $E\{x|y\} = E\{x\}$, falls x und y unabhängige ZVn sind
  - $E\big\{E\{x|y\}\big\} = E\{x\}$
  - $E\{g(y)x|y\} = g(y) \cdot E\{x|y\}$
- Rechenregeln sind analog auf vektorielle ZVn übertragbar

Eigenschaften von Korrelations- und Kovarianzfunktionen

- Gegeben: ZVn $x(t_1)$ und $x(t_2)$ aus dem ZP $\{x(t)\}$
- Aus der Definition der AKF folgt dann unmittelbar:

$$r_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_2)x(t_1)\} \stackrel{!}{=} r_{xx}(t_2, t_1)$$

- Hieraus folgt für $t_1 = t_2 = t$:

$$r_{xx}(t, t) = E\{x^2(t)\} \geq 0$$

- Weiterhin ist die folgende Abschätzung möglich:

$$|r_{xx}(t_1, t_2)| \leq +\sqrt{r_{xx}(t_1, t_1)\, r_{xx}(t_2, t_2)}$$

Eigenschaften von Korrelations- und Kovarianzfunktionen

- Gegeben: ZVn $x_1(t_1)$ und $x_2(t_2)$ aus zwei skalaren ZPen $\{x_1(t)\}$, $\{x_2(t)\}$
- Die Verhältnisse für die KKF sind dann etwas komplizierter:

$$r_{x_1x_2}(t_1, t_2) = E\{x_1(t_1)x_2(t_2)\} = E\{x_2(t_2)x_1(t_1)\} \stackrel{!}{=} r_{x_2x_1}(t_2, t_1)$$

$$\left|r_{x_1x_2}(t_1, t_2)\right| \leq \stackrel{+}{\sqrt{r_{x_1x_1}(t_1, t_1) \cdot r_{x_2x_2}(t_2, t_2)}}$$

Eigenschaften von Korrelations- und Kovarianzfunktionen

- Wenn die *ZPe* $\{x_1(t)\}$ *und* $\{x_2(t)\}$ *unabhängig* sind (s. Folien 14-16), gilt:
  - Kreuzkorrelationsfunktion

$$r_{x_1 x_2}(t_1\,,t_2) = E\{x_1(t_1)\} \cdot E\{x_2(t_2)\}$$

  - Kreuzkovarianzfunktion

$$c_{x_1 x_2}(t_1\,,t_2) = 0$$

Eigenschaften von Korrelations- und Kovarianzfunktionen

- Gegeben: Vektorieller ZP $\{\underline{x}(t)\}$ mit *paarweise unabhängigen Komponenten*
- Es gilt dann:

$$\underline{R}_{\underline{x}\,\underline{x}}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} E\{x_1(t_1)x_1(t_2)\} & E\{x_1(t_1)\}E\{x_2(t_2)\} & \cdots & E\{x_1(t_1)\}E\{x_n(t_2)\} \\ E\{x_2(t_1)\}E\{x_1(t_2)\} & E\{x_2(t_1)x_2(t_2)\} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ E\{x_n(t_1)\}E\{x_1(t_2)\} & \cdots & & E\{x_n(t_1)x_n(t_2)\} \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}_{\underline{x}\,\underline{x}}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} c_{x_1 x_1}(t_1, t_2) & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & c_{x_n x_n}(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

(Kovarianzmatrix hat also nur auf der Hauptdiagonalen Elemente $\neq 0$)

Eigenschaften von Korrelations- und Kovarianzfunktionen

- Gegeben: Vektorielle ZPe $\{\underline{x}(t)\}$ und $\{\underline{y}(t)\}$ mit *paarweise unabhängigen* Komponenten
- Es gilt:

$$\underline{R}_{\underline{x}\,\underline{y}}(t_1\,,t_2) = E\{\underline{x}(t_1)\} \cdot E\left\{\underline{y}^T(t_2)\right\}$$

$$\underline{P}_{\underline{x}\,\underline{y}}(t_1\,,t_2) = \underline{0}$$

(Kovarianzmatrix ist dann also die Nullmatrix)

Eigenschaften von Korrelations- und Kovarianzfunktionen

- Gegeben: Additiver ZP $\{z(t)\} = \{x(t)\} \pm \{y(t)\}$

- Für die AKF gilt dann z.B.:

$$r_{zz}(t_1, t_2) = r_{xx}(t_1, t_2) \pm r_{xy}(t_1, t_2) \pm r_{yx}(t_1, t_2) + r_{yy}(t_1, t_2)$$

- Entsprechendes gilt im vektoriellen Fall $\{\underline{z}(t)\} = \{\underline{x}(t)\} \pm \{\underline{y}(t)\}$:

$$\underline{R}_{\underline{z}\,\underline{z}}(t_1, t_2) = \underline{R}_{\underline{x}\,\underline{x}}(t_1, t_2) \pm \underline{R}_{\underline{x}\,\underline{y}}(t_1, t_2) \pm \underline{R}_{\underline{y}\,\underline{x}}(t_1, t_2) + \underline{R}_{\underline{y}\,\underline{y}}(t_1, t_2)$$

Unkorrelierte Zufallsprozesse

- ZPe $\{x_1(t)\}$, $\{x_2(t)\}$ sind *unkorreliert*, wenn für jedes t_1, t_2 gilt:

$$r_{x_1 x_2}(t_1,\ t_2) = E\left\{x_1(t_1)\right\} \cdot E\left\{x_2(t_2)\right\}$$

und

$$r_{x_2 x_1}(t_1,\ t_2) = E\left\{x_2(t_1)\right\} \cdot E\left\{x_1(t_2)\right\}$$

- Wegen $c_{x_1 x_2}(t_1, t_2) = r_{x_1 x_2}(t_1, t_2) - E\left\{x(t_1)\right\} \cdot E\left\{x(t_2)\right\}$ gilt dann also auch:

$$c_{x_1 x_2}(t_1,\ t_2) = c_{x_2 x_1}(t_1,\ t_2) = 0$$

Unkorrelierte Zufallsprozesse

- Übergang zu vektoriellen ZPen

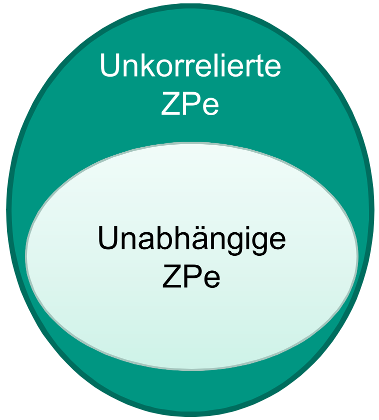
$$\{\underline{x}(t)\} = \{[x_1(t), \dots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}\}, \{\underline{y}(t)\} = \{[y_1(t), \dots, y_m(t)]^{\mathrm{T}}\}$$

- Die ZPe $\{\underline{x}(t)\}$ und $\{\underline{y}(t)\}$ sind für alle t_1, t_2 *unkorreliert*, wenn ihre Komponenten unkorreliert sind, d.h.

$$\underline{R}_{\underline{x}\,\underline{y}}(t_1, t_2) = E\{\underline{x}(t_1)\} \cdot E\{\underline{y}^T(t_2)\}$$

bzw.

$$\underline{P}_{\underline{x}\,\underline{y}}(t_1, t_2) = \underline{0}$$



- Unkorreliertheit lässt keine Aussage zur Unabhängigkeit der ZPe oder deren Komponenten zu (schwächere Eigenschaft)

Stationäre Zufallsprozesse

- Ausgangspunkt: skalarer ZP $\{x(t)\}$
- Betrachtung der n-dimensionalen ZVn $\underline{x} = \left[\underline{x}(t_1), \dots, \underline{x}(t_n)\right]^{\mathrm{T}}$ sowie der für beliebiges Δt gebildeten ZVn $\underline{x}(\Delta t) = \left[\underline{x}(t_1 + \Delta t), \dots, \underline{x}(t_n + \Delta t)\right]^{\mathrm{T}}$
- Wenn dann die ZV $\underline{x}$ und die ZV $\underline{x}(\Delta t)$ für $n = 1,2, \dots$ und beliebige Zeitpunkte $t_1, \dots, t_n$ dieselbe Verteilungsfunktion besitzen, heißt der ZP *stationär* (auch: *stationär im engeren oder strengen Sinne*) und es gilt:

$$F_{\underline{x}}\left(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n\right) = F_{\underline{x}}\left(\xi_1, t_1 + \Delta t, \dots, \xi_n, t_n + \Delta t\right)$$

- Ist diese Bedingung nur für $n \leq k$ erfüllt, so heißt der ZP *stationär von k-ter Ordnung*
- Offenbar ist jeder stationäre ZP von Ordnung k auch stationär von der Ordnung $m < k$

Stationäre Zufallsprozesse

- Folgerungen aus der Stationarität:
  - Momente 1. Ordnung sind zeitunabhängig
    - Beispiel: $E\{x(t_1)\} = E\{x\}$
  - Momente 2. Ordnung sind nur von Zeitdifferenz $\tau \coloneqq t_2 - t_1$ abhängig
    - Beispiel:

$$\begin{aligned} r_{xx}(t_1, t_2) &= E\{x(t_1) \cdot x(t_2)\} \\ &= E\{x(t) \cdot x(t+\tau)\} \\ &= r_{xx}(\tau) \end{aligned}$$

$$c_{xx}(t_1, t_2) = c_{xx}(\tau)$$

Stationäre Zufallsprozesse

- Die Eigenschaften der Korrelationsfunktionen (vgl. Folien 29,30) ergeben sich dann wie folgt:
  - KKF:

$$
\begin{aligned}
r_{x_1 x_2}(\tau) &= E\{x_1(t)x_2(t+\tau)\} \\
&= E\{x_1(t_1-\tau)x_2(t_1)\} \\
&= E\{x_2(t)x_1(t-\tau)\} \\
&= r_{x_2 x_1}(-\tau)
\end{aligned}
$$

$$
\left|r_{x_1 x_2}(\tau)\right| \leq +\sqrt{r_{x_1 x_1}(0) \cdot r_{x_2 x_2}(0)}
$$

  - AKF:

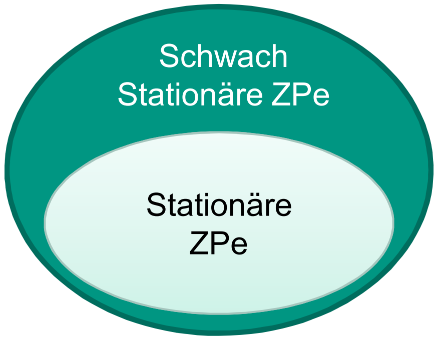
$$
r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)
$$

$$
\left|r_{xx}(\tau)\right| \leq r_{xx}(0) = E\{x^2\} \geq 0
$$

(also: stationäre AKF ist gerade Funktion mit positivem Maximum in 0)

Stationäre Zufallsprozesse

- Ein skalarer ZP heißt *schwach stationär* (auch: *stationär im weiteren Sinne, kovarianzstationär*), wenn gilt:
  - $E\{x(t_1)\}$ und $E\{x^2(t_1)\}$ existieren und sind zeitunabhängig und
  - die AKF $r_{xx}(t_1, t_2)$ existiert und hängt nur von $\tau := t_2 - t_1$ ab
    (die Autokovarianzfunktion $c_{xx}(t_1, t_2)$ hängt dann auch nur von τ ab)
  - offensichtlich gilt:
    jeder ZP, der stationär oder von zweiter Ordnung stationär ist, ist auch schwach stationär



Stationäre Zufallsprozesse

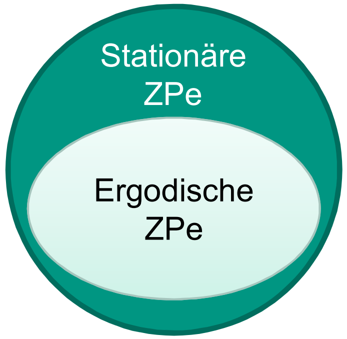
- Ein vektorieller ZP $\{\underline{x}(t)\} = \{[x_1(t), \dots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}\}$ heißt *stationär*, wenn
  - alle Komponenten stationäre ZPe sind
  - alle Verbundverteilungsfunktionen von vektoriellen ZVn, deren Elemente aus verschiedenen Komponenten von $\{\underline{x}(t)\}$ stammen, invariant gegenüber Zeitverschiebungen im Sinne von der früheren Bedingung

$$F_{\underline{x}}\left(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n\right) = F_{\underline{x}}\left(\xi_1, t_1 + \Delta t, \dots, \xi_n, t_n + \Delta t\right)$$

    sind

Ergodische Zufallsprozesse

- Ein stationärer ZP $\{x(t)\}$ heißt *ergodisch*, wenn seine Erwartungswerte, also die Ensemblemittelwerte, mit der Wahrscheinlichkeit 1 mit den entsprechenden zeitlichen Mittelwerten einer beliebigen Musterfunktion $x^{(i)}(t)$ übereinstimmen $(i = 1, \ldots)$



- Es gilt dann z.B.

$$E\{x(t_1)\} = \overline{x^{(i)}(t)} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^{(i)}(t_1)\, dt_1$$

$$r_{xx}(\tau) = \overline{x^{(i)}(t)x^{(i)}(t+\tau)} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^{(i)}(t_1)\, x^{(i)}(t_1+\tau)\, dt_1$$

- Eigenschaft nicht beweisbar (Ergodenhypothese)

Leistungsspektren

- Gegeben: stationäre ZPe $\{x(t)\}$ und $\{y(t)\}$
- Dann: Fourier-Transformation der AKF und der KKF möglich mit den *Wiener-Khintchine-Beziehungen:*
  - *Spektrale Leistungsdichte* (*Leistungsdichtespektrum*)

$$S_{xx}(j\omega) := \mathfrak{F}\left\{r_{xx}(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$r_{xx}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{S_{xx}(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

  - *Spektrale Kreuzleistungsdichte* (*Kreuzleistungsdichtespektrum*)

$$S_{xy}(j\omega) := \mathfrak{F}\left\{r_{xy}(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$r_{xy}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{S_{xy}(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Leistungsspektren

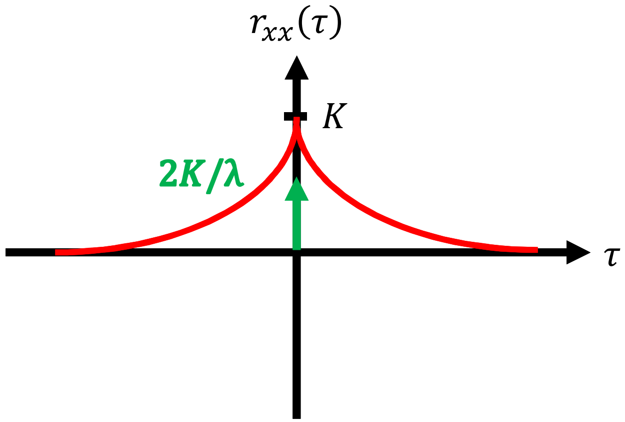
- Anhand der Definition sind verschiedene Eigenschaften ablesbar:
  - $S_{xx}(j\omega)$ gibt an, mit welchem Anteil die Frequenz ω an der Gesamtleistung des Prozesses beteiligt ist:

$$r_{xx}(\tau = 0) = E\left\{x^2\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(j\omega)\,d\omega$$

  - Die Eigenschaften der Korrelationsfunktionen übertragen sich gemäß der Rechenregeln der Fourier-Transformation in den Bildbereich, z.B.
    - $S_{xy}(j\omega) = S_{yx}(-j\omega)$
    - $S_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = 2\int_{0}^{+\infty} r_{xx}(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau = S_{xx}(\omega)$ (rein reell)
  - Es gilt (ohne Beweis): $S_{xx}(j\omega) \geq 0 \,\forall\, \omega$

Leistungsspektren

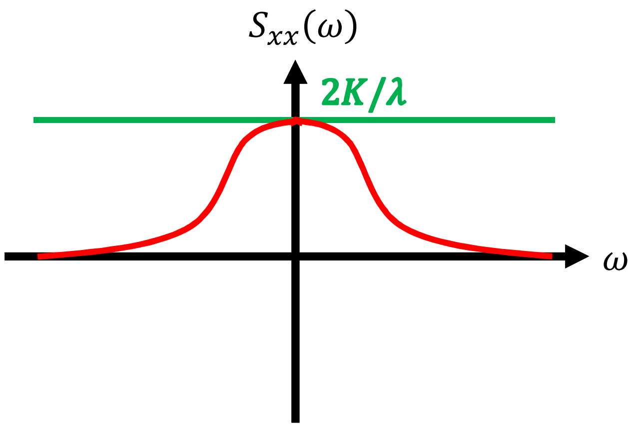
- Beispiel:
  - $r_{xx}(\tau) = K e^{-\lambda|\tau|}$
  - $S_{xx}(\omega) = \mathfrak{F}\{r_{xx}(\tau)\} = K \frac{2\lambda}{\lambda^2+\omega^2}$



Sonderfall: λ groß

- $S_{xx}(\omega) = K \frac{2/\lambda}{1+\left(\omega/\lambda\right)^2} \approx K \frac{2}{\lambda}$
- $r_{xx}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\{S_{xx}(\tau)\} = \frac{2K}{\lambda}\delta(\tau)$

→ *Weißes Rauschen* (s. später)



Normale Zufallsvariablen

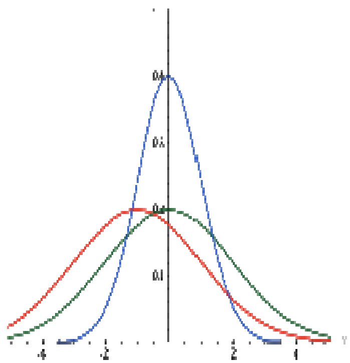
- Eine ZV $x(t_1)$ heißt *normalverteilt* (auch: *Gauß-verteilt*), wenn gilt:

$$p_x(\xi_1, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1 - m_1}{\sigma_1}\right)^2}$$

- $m_1 := E\{x(t_1)\}, \sigma_1^2 := c_{xx}(t_1, t_1)$

- Die Dichtefunktion wird also durch die ersten beiden Momente vollständig beschrieben

- Gestalt der Dichtefunktion: typische „Gauß-Glocke“



Normale Zufallsprozesse

- Ausgangspunkt: ZP $\{x(t)\}$
- Vektorielle ZV $\underline{x} = [\underline{x}(t_1), \dots, \underline{x}(t_n)]^{\mathrm{T}}$ aus $\{x(t)\}$ bei $t_1, \dots t_n$ entstanden
- Wenn $\underline{x}$ für beliebiges n und beliebige $t_1, \dots t_n$ normalverteilt ist, so ist $\{x(t)\}$ ein *normaler ZP (Gauß-ZP)*
- Zugehörige Dichtefunktion:

$$p_{\underline{x}}(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sqrt{\det \underline{N}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\underline{\xi}-\underline{m})^T \underline{N}^{-1}(\underline{\xi}-\underline{m})}$$

mit

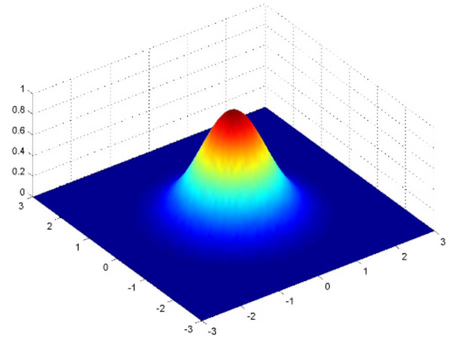
- $\underline{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$
- $\underline{m} = E\{\underline{x}(t)\}$
- $\underline{N} = E\left\{(\underline{x}(t) - \underline{m}) \cdot (\underline{x}(t) - \underline{m})^T\right\}$

Normale Zufallsprozesse

Karlsruher Institut für Technologie

- Spezialfall $n = 2$
- Dichtefunktion:

$$p_{xx}(\xi_1, t_1, \xi_2, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}Q(\xi_1,\xi_2)}$$



- Dabei:
  - $Q(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{\xi_1 - m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\xi_1 - m_1)(\xi_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{\xi_2 - m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$
  - $m_i = E\{x(t_i)\} \quad (i = 1, 2)$
  - $\sigma_i^2 = E\left\{\left[x(t_i) - E\{x(t_i)\}\right]^2\right\} \quad (i = 1, 2)$
  - $\rho = \frac{c_{xx}(t_1, t_2)}{\sigma_1\sigma_2}$ *(Korrelationskoeffizient)*

Normale Zufallsprozesse

Karlsruher Institut für Technologie

- Ausgangspunkt: Vektorieller ZP $\{\underline{x}(t)\}$
  - Vektorielle ZV $\underline{x} = \left[\underline{x}_1(t_1^*), \dots, \underline{x}_1(t_{n_1}^*), \dots, \underline{x}_n\left(t_1^{(n*)}\right), \dots, \underline{x}_n\left(t_{n_n}^{(n*)}\right)\right]^{\mathrm{T}}$
  - Komponenten von $\underline{x}$ jeweils bei $t_1^*, \dots, t_{n_n}^{(n*)}$ aus $\{\underline{x}(t)\}$ entstanden
- Wenn $\underline{x}$ für beliebiges n und beliebige $t_1^*, \dots, t_{n_n}^{(n*)}$ normalverteilt, dann ist $\{\underline{x}(t)\}$ ein *normaler vektorieller ZP*
- Normale ZPe sind durch ihre 1. und 2. Momente vollständig festgelegt, daher gilt bei ihnen
  - Schwache Stationarität ⇔ Stationarität (vgl. Folie 40)
  - Unkorreliertheit ⇔ Unabhängigkeit (vgl. Folie 36)

Weißes Rauschen

- Ein skalarer normaler ZP ist ein *Gauß'sches Weißes Rauschen in kontinuierlicher Zeit,* wenn für seine Autokovarianzfunktion gilt:

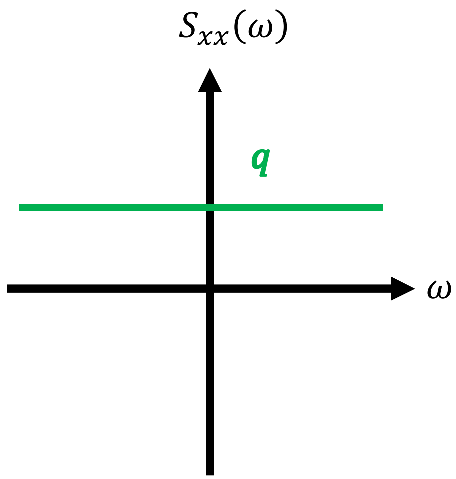
$$c_{xx}(t_1, t_2) = q(t_1) \cdot \delta(t_1 - t_2)$$

- Sonderfall: $\{x(t)\}$ *stationär* mit $E\{x(t)\} = 0$:

$$c_{xx}(\tau) = r_{xx}(\tau) = q\delta(\tau)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \; \mathcal{F}$$

$$S_{xx}(\omega) = q$$



- Bemerkungen:
  - Würde unendlich hohe Leistung bedeuten
    → physikalisch nicht realisierbar
  - Nützliche Approximation innerhalb eines begrenzten Frequenzbereichs

Weißes Rauschen

- Ein vektorieller normaler ZP $\{\underline{x}(t)\}$ ist *vektorielles Gauß'sches Weißes Rauschen in kontinuierlicher Zeit,* wenn gilt:

$$\underline{P}_{\underline{xx}}(t_1, t_2) = \underline{Q}(t_1) \cdot \delta(t_1 - t_2)$$

- Ein skalarer normaler ZP in diskreter Zeit $\{x(t_\nu), \nu = 0,1, \dots\}$ heißt *Gauß'sches Weißes Rauschen in diskreter Zeit,* wenn für ihn gilt:

$$c_{xx}(t_k, t_\chi) = q(t_k) \cdot \delta_{k\chi}(k, \chi = 0,1, \dots)$$

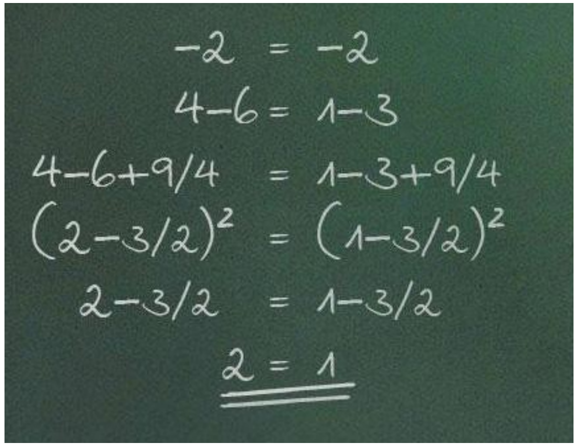
$$\delta_{k\chi} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \chi \\ 0 & \text{für } k \neq \chi \end{cases}$$

(δ: Kronecker-Symbol)

- Ebenso ist ein vektorieller Normaler ZP $\{\underline{x}(t_\nu), \nu = 0,1, \dots\}$ ein *vektorielles Gauß'sches Weißes Rauschen in diskreter Zeit,* wenn gilt:

$$\underline{P}_{\underline{xx}}(t_k, t_\chi) = \underline{Q}(t_k) \cdot \delta_{k\chi}(k, \chi = 0,1, \dots)$$

Zurück zur Tafel …



Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme